



TITLE:

非線型回路における高調波振動

AUTHOR(S):

林, 千博; 西川, 禎一; 上田, 暁亮

CITATION:

林, 千博 ...[et al]. 非線型回路における高調波振動. 2000: 63-88

ISSUE DATE:

2000-03-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/24275>

RIGHT:

非直線理論研究会資料

非線型回路における高調波振動

林 千博，西川 禎一，上田 皖亮

(京都大学工学部)

1963年11月29日

(於 関 西)

社団法人

電 気 通 信 学 会

目 次

1. 緒 言	1
2. 直列共振回路における高調波振動	1
2.1 回路方程式	2
2.2 周 期 解	3
2.3 周期解の安定性	4
2.4 偶数次高調波振動の発生	8
2.5 アナログ計算機による計算	10
2.6 電気回路における実験	10
3. 並列共振回路における高調波振動	12
3.1 回路方程式	13
3.2 周 期 解	14
3.3 周期解の安定性	18
3.4 アナログ計算機による計算	20
3.5 電気回路における実験	21
文 献	21

非線型回路における高調波振動

林 千 博 西 川 樟 一 上 田 暁 亮

(京 都 大 学 工 学 部)

1. 緒 言

非線型の系に正弦波外力を加えた場合に発生する振動には、外力の周波数の成分以外にその高調波および分数調波成分を含むことがある。分数調波振動については文献[1]～[5]にも報告したように既に可成り研究が進んでいる。しかし高調波振動については現象そのものが非常に複雑であり、^{*}理論的解析の困難と相まってその研究は遅れており、やや纏った報告としては文献[2], [6]がある程度である。

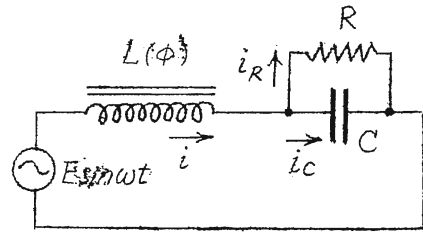
この報告は典型的な2つの電気回路を例にとつて高調波振動の発生の模様を論じている。その1つは可飽和インダクタンスを含む直列共振回路に大きな振巾の外力を加えた場合であり、他の1つは同じく可飽和インダクタンスを含む並列共振回路を取扱っている。回路方程式を厳密に解くことは困難であるが、数式的な近似解を求め、アナログ計算機による解および実際の電気回路に発生する振動の測定結果と比較する。

2. 直列共振回路における高調波振動

第2.1図に示すような可飽和鉄心L(中)を含む直列共振回路に正弦波電圧 $E \sin \omega t$ を印加するとき、印加電圧の振巾Eが大きく鉄心の飽和

* 非線型の系に発生する高調波振動にはその成分が基本調波振動成分に比べて小さく二義的な重要性しか持たない場合と、ある特定の高調波成分が優勢に発生する場合とがある。本論では後者の場合を取扱う。

程度が大きい場合に発生する振動に顕著な高調波成分が現われる。ここではこの様な高調波振動について考察を行なう。



第2.1図—直列共振回路

2.1 回路方程式

第2.1図の直列共振回路において

図に示した記号を用いれば次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} n \frac{d\phi}{dt} + R i_R &= E \sin \omega t \\ R i_R &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt \\ i &= i_R + i_C \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに n は鉄心の巻線数を, ϕ は鉄心中の磁束を表わす。また可飽和鉄心の磁化特性は, ヒステリシスを無視すれば, 一般に

$$i = f(\phi) = a_1 \phi + a_3 \phi^3 + a_5 \phi^5 + \dots$$

のように表わすことが出来る。ここでは高次の項を省略して3次特性

$$i = a_1 \phi + a_3 \phi^3 \quad (2.2)$$

で近似した。^{*}

次に電流 i および磁束 ϕ を無次元化するために, 次式で与えられる変数 u および v を導入する。

$$i = I_n \cdot u, \quad \phi = \Phi_n \cdot v \quad (2.3)$$

ただし I_n および Φ_n は電流および磁束の単位量であり

$$n \omega^2 C \Phi_n = I_n, \quad C_1 + C_3 = 1 \quad (2.4)$$

$$\text{ここに} \quad C_1 = \frac{a_1 \Phi_n}{I_n}, \quad C_3 = \frac{a_3 \Phi_n^3}{I_n} \quad (2.5)$$

* 適当な空隙を持つ数個の鉄心を組合わせることにより, 近似的に3次特性を作ることが出来る [文献2, pp. 66-67 参照]。

なる関係を満足するように選ぶ。(2.2), (2.3)および(2.4)式を用いて(2.1)式を書き直せば変数 τ について次の方程式を得る。

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + k \frac{dv}{d\tau} + C_1 v + C_3 v^3 = B \cos \tau \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \tau &= \omega t - \tan^{-1} k, \quad k = \frac{1}{\omega CR} \\ B &= \frac{E}{n\omega\Phi_n} \sqrt{1+k^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 周期解

第2.1図の回路で印加電圧 E を大きくして行くと系には基本調波成分の他に多くの高調波成分を含む振動が発生する。系の非線型項としては対称な3次特性を考えているので、これらの高調波成分として、 ω , 3ω , 5ω ...等の奇数次高調波成分が考えられるが、この節では簡単のため基本調波成分の他に 3ω 高調波成分のみを考えることにする。すなわち(2.6)式の周期解として

$$v_0(\tau) = x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau + x_3 \sin 3\tau + y_3 \cos 3\tau \quad (2.8)$$

を仮定する。(2.8)式を(2.6)式に代入して $\sin \tau$, $\cos \tau$, $\sin 3\tau$ および $\cos 3\tau$ の係数をそれぞれ両辺において等しいとおけば次式を得る。

$$\begin{aligned} -A_1 x_1 - k y_1 - \frac{3}{4} C_3 [(x_1^2 - y_1^2) x_3 + 2 x_1 y_1 y_3] &\equiv X_1(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0 \\ k x_1 - A_1 y_1 + \frac{3}{4} C_3 [2 x_1 y_1 x_3 - (x_1^2 - y_1^2) y_3] &\equiv Y_1(x_1, y_1, x_3, y_3) = B \\ -A_3 x_3 - 3k y_3 - \frac{1}{4} C_3 (x_1^2 - 3y_1^2) x_1 &\equiv X_3(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0 \\ 3k x_3 - A_3 y_3 - \frac{1}{4} C_3 (3x_1^2 - y_1^2) y_1 &\equiv Y_3(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (r_1^2 + 2r_3^2), \quad A_3 = 9 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (2r_1^2 + r_3^2) \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2, \quad r_3^2 = x_3^2 + y_3^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.9)式から x_1 , y_1 , x_3 および y_3 を消去すれば基本調波成分の振幅 r_1

および第3高調波成分の振幅 r_3 を与える次式を得る。

$$\left[\left(A_1 - \frac{3r_3^2}{r_1^2} A_3 \right)^2 + k^2 \left(1 + \frac{9r_3^2}{r_1^2} \right)^2 \right] r_1^2 = B^2 \quad (2.11)$$

$$(A_3^2 + 9k^2) r_3^2 = \frac{1}{16} C_3^2 r_1^6$$

2.3 周期解の安定性

次に周期解の安定性を調べるために周期解(2.8)式からの微小変分 $\xi (=v-v_0)$ を考える。周期解 $v_0(\tau)$ が(2.6)式を満足することを考慮し、さらに ξ の2次以上の微小量を見捨てることにより(2.6)式の変分方程式として

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + k \frac{d\xi}{d\tau} + (C_1 + 3C_3 v_0^2) \xi = 0 \quad (2.12)$$

を得る。さらに

$$\xi = e^{-\delta \tau} \cdot \eta, \quad \delta = k/2 \quad (2.13)$$

なる変換を施せば、 η に関して次のような Hill の方程式になる。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^3 \theta_{ns} \sin 2n\tau + 2 \sum_{n=1}^3 \theta_{nc} \cos 2n\tau \right] \eta = 0$$

$$\text{ここに} \quad \theta_0 = C_1 - \delta^2 + \frac{3}{2} C_3 (r_1^2 + r_3^2) \quad (2.14)$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2} C_3 (x_1 y_1 - x_1 y_3 + y_1 x_3), \quad \theta_{1c} = -\frac{3}{4} C_3 (x_1^2 - y_1^2) + \frac{3}{2} C_3 (x_1 x_3 + y_1 y_3)$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2} C_3 (x_1 y_3 + y_1 x_3), \quad \theta_{2c} = \frac{3}{2} C_3 (-x_1 x_3 + y_1 y_3)$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2} C_3 x_3 y_3, \quad \theta_{3c} = -\frac{3}{4} C_3 (x_3^2 - y_3^2)$$

Floquet の定理によれば(2.14)式の一般解は[7]

$$\eta = C_1 e^{\mu \tau} \phi(\tau) + C_2 e^{-\mu \tau} \psi(\tau) \quad (2.15)$$

ここに C_1, C_2 は積分定数

$\phi(\tau), \psi(\tau)$ は周期 π あるいは 2π の周期函数

μ はパラメータ θ_0, θ_{2s} および θ_{3c} により決定される特性指数

で与えられる。一般に Hill の方程式の解はパラメタ θ'_S の値により μ が虚数となり安定な場合と μ が実数となり不安定な場合とがあり、 θ_0 の増加に従って安定解、不安定解が交互に現われる。不安定解の現われるパラメタ θ'_S の領域を θ_0 の小さいものから順次 ν 1 次, ν 2 次, ν 3 次, --- 不安定領域と称する。(2.15) 式の周期函数 $\phi(\tau)$ および $\psi(\tau)$ は奇数次不安定領域においては奇数次周波数成分, 偶数次不安定領域においては偶数次の周波数成分よりなり, ν 次不安定領域においては特に ν 高調波振動成分が優勢に現われることが知られている [文献 2, pp.7-10, pp.127-137]。

さて周期解が近似解であることを考慮すれば変分方程式も同じ程度の近似で解かれるべきである [8]。そこで ν 1 次および ν 3 次不安定領域における特殊解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \phi(\tau) = e^{\mu\tau} [a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_3 \sin(3\tau - \sigma_3)] \quad (2.16)$$

とおく。(2.16) 式を (2.14) 式に代入し $\sin \tau$, $\cos \tau$, $\sin 3\tau$ および $\cos 3\tau$ の係数を両辺においてそれぞれ等しいとおき, 特性指数 μ を求めるためにそれらの式から a_1 , a_3 , σ_1 および σ_3 を消去すれば

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - 1 - \theta_{1c} & \theta_{1s} - 2\mu & \theta_{1c} - \theta_{2c} & -\theta_{1s} + \theta_{2s} \\ \theta_{1s} + 2\mu & \theta_0 + \mu^2 - 1 + \theta_{1c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} \\ \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_0 + \mu^2 - 9 - \theta_{3c} & \theta_{3s} - 6\mu \\ -\theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} & \theta_{3s} + 6\mu & \theta_0 + \mu^2 - 9 + \theta_{3c} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

を得る。(2.17) 式より求まる特性指数 μ が $|\mu| < \delta$ なる条件を満たせば (2.13) 式より変分 ξ は時間の経過と共にゼロに収斂するから, ν 1 次および ν 3 次不安定領域に対する安定条件は

$$\Delta(\delta) > 0 \quad (2.18)$$

で与えられる。また上式の安定条件は (2.9) 式を用いて

$$\Delta(\delta) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \frac{\partial X_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial y_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} & \frac{\partial X_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial Y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_3}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_3}{\partial x_3} & \frac{\partial Y_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(X_1, Y_1, X_3, Y_3)}{\partial(x_1, y_1, x_3, y_3)} > 0 \quad (2.19)$$

と書き直すことが出来る。

(2.9) 式を B について微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dB} + \frac{\partial X_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dB} + \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dB} + \frac{\partial X_1}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dB} &= 0 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dB} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dB} + \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dB} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dB} &= 1 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dB} + \frac{\partial X_3}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dB} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dB} + \frac{\partial X_3}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dB} &= 0 \\ \frac{\partial Y_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dB} + \frac{\partial Y_3}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dB} + \frac{\partial Y_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dB} + \frac{\partial Y_3}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dB} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

これらの方程式より

$$\frac{dx_1}{dB} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta(\delta)}, \quad \frac{dy_1}{dB} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta(\delta)}, \quad \frac{dx_3}{dB} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta(\delta)}, \quad \frac{dy_3}{dB} = \frac{\Delta_{24}}{\Delta(\delta)} \quad (2.21)$$

を得る。ここに Δ_{2i} は行列式 $\Delta(\delta)$ の第 2 行第 i 列要素の余因子を表わす。これらより

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dB} &= \frac{1}{r_1 \Delta(\delta)} (x_1 \Delta_{21} + y_1 \Delta_{22}) \\ \frac{dr_3}{dB} &= \frac{1}{r_3 \Delta(\delta)} (x_3 \Delta_{23} + y_3 \Delta_{24}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

このことより周期解 (2.8) の振巾特性曲線 ($B-r_1$ および $B-r_3$ 曲線) が垂直接線を有する点は $\Delta(\delta) = 0$ となる安定限界と一致することがわかる。

次に方程式 (2.14) の第 2 次不安定領域における特殊解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \phi(\tau) = e^{\mu\tau} [C + \sin(2\tau - \sigma_2)] \quad (2.23)$$

とおく [文献2, pp.13-16 参照]。上に述べたと同様な方法により特性指数 μ を定める式として

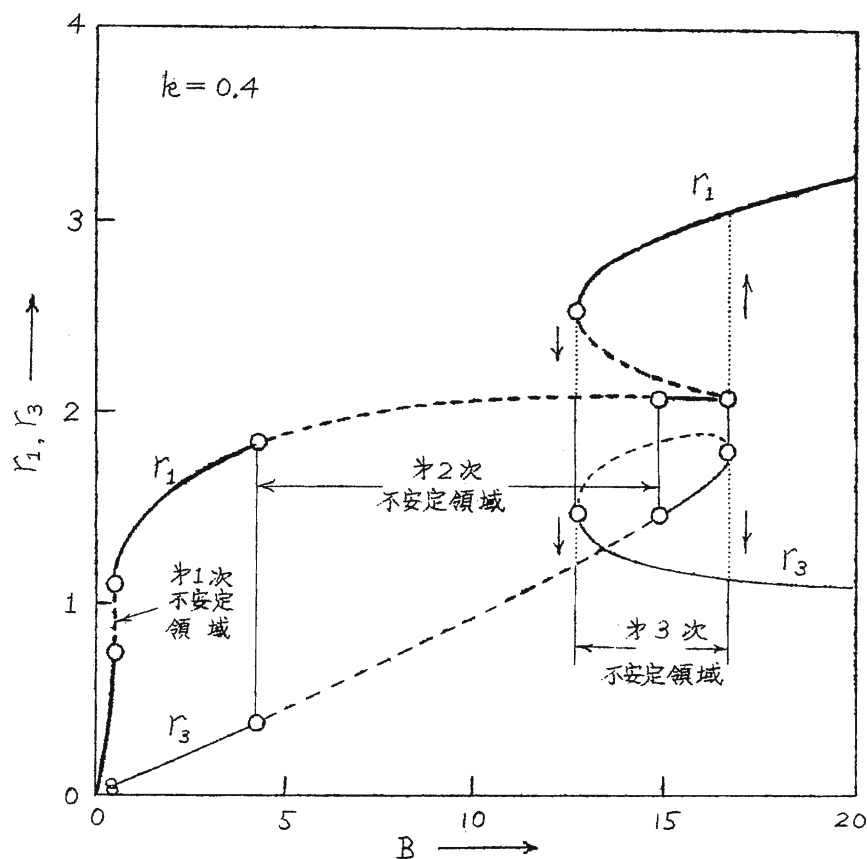
$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 & \theta_{1S} & \theta_{1C} \\ 2\theta_{1S} & \theta_0 + \mu^2 - 4 - \theta_{2C} & \theta_{2S} - 4\mu \\ 2\theta_{1C} & \theta_{2S} + 4\mu & \theta_0 + \mu^2 - 4 + \theta_{2C} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

を得る。従って $|\mu| < \delta$ なる条件は

$$\Delta(\delta) > 0 \quad (2.25)$$

で与えられる。

数値例 (2.6) 式においてパラメタを $k=0.4$, $C_1=0$, $C_3=1$



第2.2図 3次高調波振動 (2.8) 式の振巾特性

とすれば(2.6)式は

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + 0.4 \frac{dv}{d\tau} + v^3 = B \cos \tau \quad (2.26)$$

(2.11)式を用いて振巾特性を計算した結果を第2.2図に示す。図において ν 1次および ν 3次不安定領域と記した部分は安定条件(2.18)式を,
 ν 2次不安定領域と記した部分は安定条件(2.25)式を満たさぬ部分である。安定な部分を実線で不安定な部分を点線で示した。

ν 2次不安定領域においては(2.28)式の形の周期解は不安定となり、直流分および ν 2高調波成分を伴った振動が発生するものと考えられるので次の節においてその様な振動を考察する。

2.4 偶数次高調波振動の発生

ここでは前節において述べた ν 2次不安定領域における周期解の様子について考察する。そのために近似解(2.8)にさらに直流分および ν 2高調波成分をつけ加えたものを考慮すべきであるが、計算が非常に煩雑になるので、ここでは直流分、基本調波成分および ν 2高調波成分までを考慮に入れた近似解について考える。すなわち周期解として次式を仮定する。

$$v_0(\tau) = z + x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau + x_2 \sin 2\tau + y_2 \cos 2\tau \quad (2.27)$$

(2.27)式を(2.6)式に代入し、定数項, $\sin \tau$, $\cos \tau$, $\sin 2\tau$ および $\cos 2\tau$ の係数をそれぞれ両辺において等しいとおけば次式を得る。

$$\begin{aligned} & C_1 z + C_3 \left\{ z^3 + \frac{3}{2} z (x_1^2 + y_1^2) + \frac{3}{4} [2x_1 y_1 x_2 - (x_1^2 - y_1^2) y_2] \right\} \\ & \equiv Z(z, x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \\ & -A_1 x_1 - k y_1 + 3C_3 z (y_1 x_2 - x_1 y_2) \equiv X_1(z, x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \\ & k x_1 - A_1 y_1 + 3C_3 z (x_1 x_2 + y_1 y_2) \equiv Y_1(z, x_1, y_1, x_2, y_2) = B \\ & -A_2 x_2 - 2k y_2 + 3C_3 z x_1 y_1 \equiv X_2(z, x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \\ & 2k x_2 - A_2 y_2 - \frac{3}{2} C_3 z (x_1^2 - y_1^2) \equiv Y_2(z, x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここに

$$A_1 = 1 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (4Z^2 + r_1^2 + 2r_2^2), \quad A_2 = 4 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (4Z^2 + 2r_1^2 + r_2^2) \quad (2.29)$$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$$

(2.28)式から x_1, y_1, x_2 および y_2 を消去すれば直流分 Z , 基本調波成分の振巾 r_1 および ω 2 高調波成分の振巾 r_2 を与える次式を得る。

$$\left[\left(A_1 - \frac{2r_2^2}{r_1^2} A_2 \right)^2 + k^2 \left(1 + \frac{4r_2^2}{r_1^2} \right)^2 \right] r_1^2 = B^2$$

$$C_1 Z^2 + C_3 Z^2 \left[Z^2 + \frac{3}{2} (r_1^2 + r_2^2) \right] + \frac{1}{2} A_2 r_2^2 = 0 \quad (2.30)$$

$$(A_2^2 + 4k^2) r_2^2 = \frac{9}{4} C_3^2 Z^2 r_1^4$$

次に周期解の安定性について考える。前節と同様な方法で変分方程式を導けば

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^4 \theta_{ns} \sin n\tau + 2 \sum_{n=1}^4 \theta_{nc} \cos n\tau \right] \eta = 0 \quad (2.31)$$

ここに $\xi (= v - v_0) = e^{-\delta\tau} \cdot \eta$

となる。(2.31)式の不安定領域における特殊解を

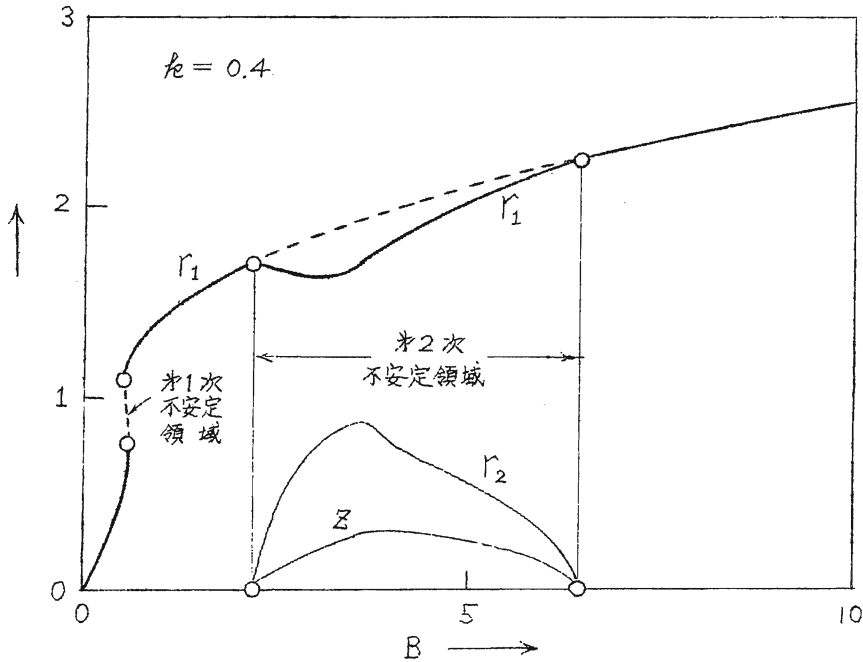
$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \phi(\tau) = e^{\mu\tau} [c + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_2 \sin(2\tau - \sigma_2)] \quad (2.32)$$

とおき安定条件を求めれば(2.28)式を用いて、次式を得る*。

$$\Delta(\delta) = \frac{\partial(Z, X_1, Y_1, X_2, Y_2)}{\partial(Z, x_1, y_1, x_2, y_2)} > 0 \quad (2.33)$$

数値例 系のパラメタを前節におけると同じ値に選び(2.30)式を用いて振巾特性を計算した結果を第2.3図中の ω 2 次不安定領域は第2.2図のそれに比して外力の振巾 B の範囲が狭くなり、かつ B の小さい

* 本文では省略したが(2.31)式の不安定解には $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ 調波振動の成分を含むものも考えられる(オ2.6節参照)。



第 2.3 図 2 次高調波振動 (2.27) 式の振巾特性

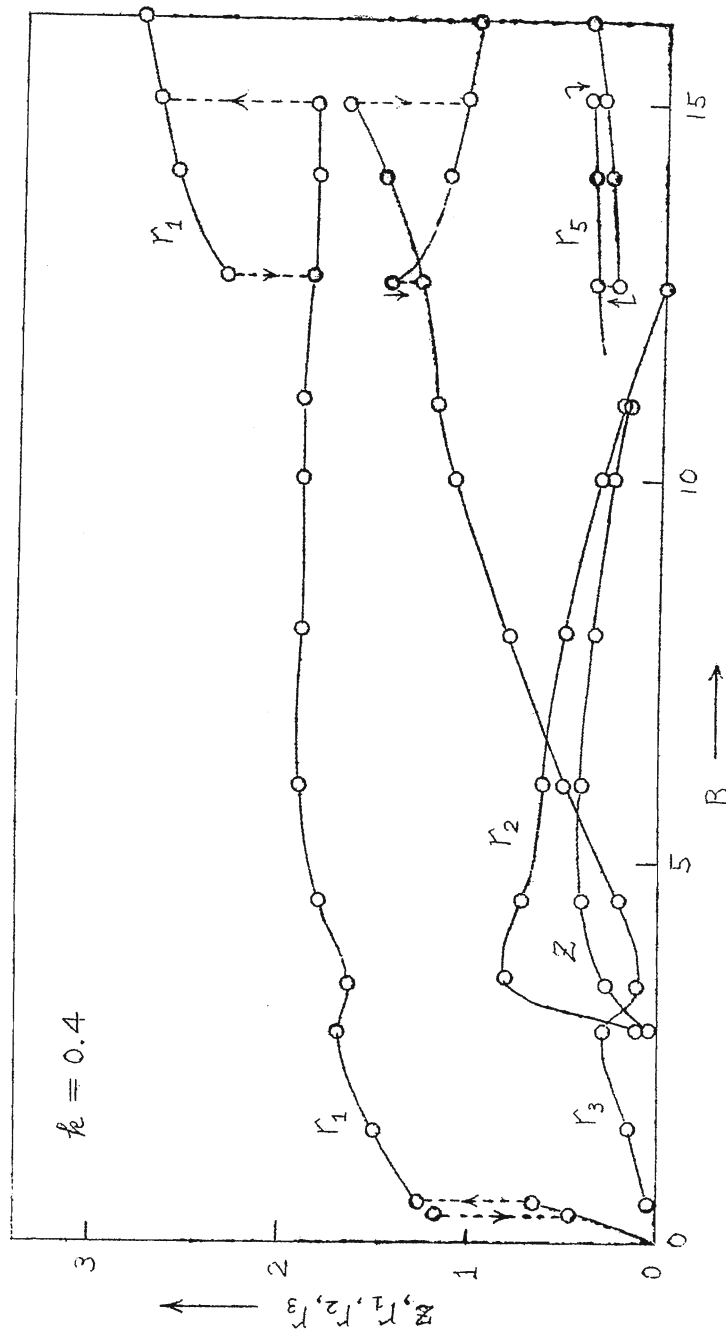
方へ寄っているがこれは近似解 (2.27) において 3 次高調波成分を考慮に入れなかったことに帰因するものと考えられる。

2.5 アナログ計算機による計算

上述の解析結果を低速度形アナログ計算機を用いて検討する。(2.26) 式を解いて得られた波形より各調波成分の振巾を求めた。その結果は第 2.4 図に示すように前節までの理論的考察と定性的によく一致している。

2.6 電気回路における実験

第 2.5 図 (末尾のオフセット図参照) は第 2.1 図に示すような直列共振回路において印加電圧の振巾を非常に大きくした場合に発生する電流およびその各調波成分を示したものである。添字は各成分の周波数を表わしている。従来よく知られている印加電圧による鉄共振現象 (1 次不安定領域の限界における跳躍現象) 以外に、印加電圧をさらに上昇さ



第2.4図 アナログ計算機による計算結果

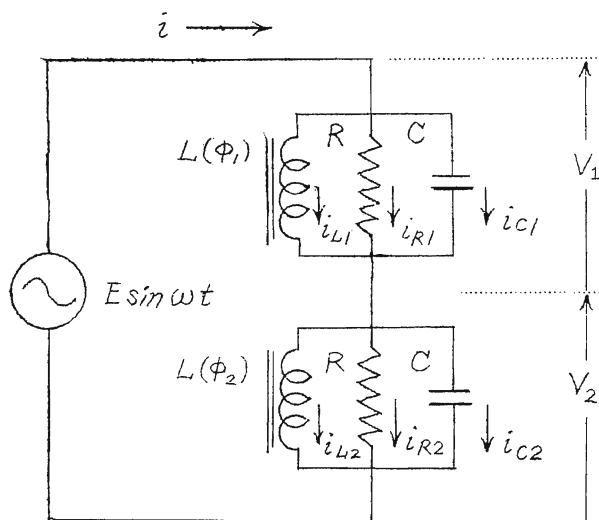
せると振動状態は順次2次, 3次不安定領域にはいり, それぞれ異常現象を呈している。偶数次高調波振動が発生している領域内には分数調波成分が現われる領域があるが, これは2.4節(2.31)式の分数調

波成分をもつ不安定領域に対応しているものと考えられる（9頁脚註参照）。なお縦軸には電流の値をとっているのが2次不安定領域において直流分は現われていないが可飽和鉄心の非線型性のため磁束中は直流分を含むものと考えられる。

直列共振回路においては印加電圧の振巾を非常に大きくした場合に高調波振動が発生するが、並列共振回路においては直列共振回路の場合ほど印加電圧の振巾を大きくしなくても容易に高次の高調波振動が発生する。その理由は次のごとくである。すなわち直列共振回路では直列に挿入された容量により電流が制限されて鉄心は飽和しにくい、並列共振回路では鉄心が容易に飽和し等価的なインダクタンスが減少して高調波振動が発生しやすいからである。次章ではこの様な並列共振回路について考察する。

3. 並列共振回路における高調波振動

この節では同じ特性をもつ2つの $L-C$ 並列共振回路を直列に接続し、それに正弦波電圧を印加した第3.1図に示すような回路に発生する振動



第3.1図 並列共振回路

を考える。並列回路が1つあるだけならば何ら特異な現象は起らないが2つの場合には中間点の電圧変動は特徴あるものとなる[文献2, pp.41-48参照]。

3.1 回路方程式

第3.1図の記号を用いて回路方程式を書けば次のようになる。

$$\begin{aligned} n \frac{d\phi_1}{dt} &= R i_{R1} = \frac{1}{C} \int_0^t i_{C1} dt = V_1 \\ n \frac{d\phi_2}{dt} &= R i_{R2} = \frac{1}{C} \int_0^t i_{C2} dt = V_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$V_1 + V_2 = E \sin \omega t$$

$$i = i_{L1} + i_{R1} + i_{C1} = i_{L2} + i_{R2} + i_{C2}$$

ここに ϕ_1 および ϕ_2 はそれぞれの鉄心中の磁束であり、 n は各鉄心の巻線数である。可飽和インダクタンスの電流と磁束の関係は直列共振回路の場合と同様に次の3次式で表わされるものとする。

$$i_{L1} = f(\phi_1) = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_3 \phi_1^3, \quad i_{L2} = f(\phi_2) = \alpha_1 \phi_2 + \alpha_3 \phi_2^3 \quad (3.2)$$

(3.1) の1式および2式より

$$\phi_1 + \phi_2 = -\frac{E}{n\omega} \cos \omega t \quad (3.3)$$

となる。2つの並列共振回路が同じ状態にあるとき、すなわちバランスした平衡状態にあるときは

$$\phi_1 = \phi_2 = -\frac{E}{2n\omega} \cos \omega t \quad (3.4)$$

である。その状態から ϕ_1 が ϕ だけ増せば ϕ_2 は ϕ だけ減少する。磁束の変化分 ϕ は次のように表わされる。

$$\phi = \phi_1 + \frac{E}{2n\omega} \cos \omega t = -\left(\phi_2 + \frac{E}{2n\omega} \cos \omega t\right) \quad (3.5)$$

(3.1) および (3.5) 式より次の関係を導くことが出来る。

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2nC} (i_{L1} - i_{L2}) = 0 \quad (3.6)$$

オ2.1節にのけると同様に電流および磁束を無次元化量で置き換えるために次の変数 u_{L1} , u_{L2} および v を導入する。

$$i_{L1} = I_n \cdot u_{L1}, \quad i_{L2} = I_n \cdot u_{L2}, \quad \phi = \Phi_n \cdot v \quad (3.7)$$

(2.4) 式と同様に I_n および Φ_n の間には次の関係を設ける。

$$n\omega^2 C \Phi_n = I_n, \quad C_1 + C_3 = 1 \quad (3.8)$$

$$\text{ここに} \quad C_1 = \frac{a_1 \Phi_n}{I_n}, \quad C_3 = \frac{a_3 \Phi_n^3}{I_n} \quad (3.9)$$

(3.2), (3.7) および (3.8) 式を用いて (3.6) 式を書き改めれば

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + k \frac{dv}{d\tau} + \left(C_1 + \frac{3}{2} C_3 B^2 + \frac{3}{2} C_3 B^2 \cos 2\tau \right) v + C_3 v^3 = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{ここに} \quad \tau = \omega t, \quad k = \frac{1}{\omega CR}, \quad B = \frac{E}{2n\omega\Phi_n} \quad (3.11)$$

(3.10) 式が基本方程式であり、その解について考察する。これは *Mathieu* の方程式に減衰項および非線型項が付加された方程式とみることができ
る。

3.2 周期解

(3.10) 式において $k=0$, すなわち減衰がない場合で、かつ v の値が極めて小さく非線型項が無視できる場合には *Mathieu* の方程式

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\tau) v = 0$$

$$\text{ただし} \quad \theta_0 = C_1 + \frac{3}{2} C_3 B^2 \quad (3.12)$$

$$\theta_1 = \frac{3}{4} C_3 B^2$$

を得る。印加電圧 B の値を変えれば θ_0 , θ_1 は変化し、よく知られているように解 v の振巾が限りなく増大する不安定領域とそうでない安定領

域とが存在する。 $C_1=0$, $C_3=1$ のときは

$$\theta_0 = 2\theta_1 = \frac{3}{2}B^2 \quad (3.13)$$

となる。第3.2図（末尾のオフセット図参照）に(3.12)式の解が不安定になる領域を斜線で示した。各領域を θ_0 の値の小さいものから順次 θ_1 次, θ_2 次, ... 不安定領域と呼ぶ。なお同図中には(3.13)式で与えられる θ_0 , θ_1 の関係が太線で示されている。Mathieu の方程式の解の示すところによれば θ_n 次不安定領域において θ_n 次高調波振動が最も顕著に自励する〔文献2, pp. 7-10 参照〕。振動が成長すれば非線型項のためある振巾で平衡状態に落着くと考えられる。系に減衰があるときはそれによって振動の振巾はさらに制限されるであろう。

なお(3.12)あるいは(3.13)式に見られるように B を増せば θ_0 は容易に増加するので並列共振回路では直列共振回路におけるより高次の高調波振動が発生しやすいことが理解できる（ $\theta_2.6$ 節参照）。

以上の考察にもとずき、 θ_1 次, θ_2 次, θ_3 次不安定領域においては(3.10)式の周期解にそれぞれ基本調波, θ_2 高調波, および θ_3 高調波成分が優勢に現われると考えられるから、周期解を次の形に仮定する。

$$\text{基本調波振動} : v_0(\tau) = x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau \quad (3.14)$$

$$\theta_2 \text{ 高調波振動} : v_0(\tau) = z + x_2 \sin 2\tau + y_2 \cos 2\tau \quad (3.15)$$

$$\theta_3 \text{ 高調波振動} : v_0(\tau) = x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau + x_3 \sin 3\tau + y_3 \cos 3\tau \quad (3.16)$$

(a) 基本調波振動

(3.14)式を(3.10)式に代入し $\sin \tau$ および $\cos \tau$ の係数をそれぞれゼロに等しいとおけば次式を得る。

$$\begin{aligned} -\left(A_1 + \frac{3}{4}C_3B^2\right)x_1 - k y_1 &= X_1(x_1, y_1) = 0 \\ k x_1 - \left(A_1 - \frac{3}{4}C_3B^2\right)y_1 &= Y_1(x_1, y_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここに

$$A_1 = 1 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (2B^2 + r_1^2) \quad (3.18)$$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

(3.17) 式より x_1 および y_1 を消去すれば次の式を得る。

$$\left[A_1 + k^2 - \left(\frac{3}{4} C_3 B^2 \right)^2 \right] r_1^2 = 0 \quad (3.19)$$

これより基本調波振動の振巾 r_1 は次のように決定される。

$$r_1^2 = 0 \quad (3.20)$$

あるいは

$$r_1^2 = \left(\frac{4}{3} - 2B^2 \right) \pm \sqrt{B^2 - \left(\frac{4}{3} \frac{k}{C_3} \right)^2} \quad (3.21)$$

なお(3.21)式が成立つとき振巾 r_1 の成分 x_1 および y_1 は次のように表わされる。

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{3C_3 B^2 - 4A_1}{6C_3}} \frac{r_1}{B}, \quad y_1 = \mp \sqrt{\frac{3C_3 B^2 + 4A_1}{6C_3}} \frac{r_1}{B} \quad (3.22)$$

(b) 第2高調波振動

(3.15) 式を (3.10) 式に代入し定数項, $\sin 2\tau$ および $\cos 2\tau$ の係数をそれぞれゼロに等しいとおけば

$$\left(C_1 + \frac{3}{2} C_3 B^2 + C_3 z^2 + \frac{3}{2} C_3 r_2^2 \right) z + \frac{3}{4} C_3 B^2 y_2 = Z(z, x_2, y_2) = 0$$

$$-A_2 x_2 - 2k y_2 = X_2(z, x_2, y_2) = 0 \quad (3.23)$$

$$2k x_2 - A_2 y_2 + \frac{3}{2} C_3 B^2 z = Y_2(z, x_2, y_2) = 0$$

ここに

$$A_2 = 4 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (2B^2 + 4z^2 + r_2^2) \quad (3.24)$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$$

(3.23) 式より x_2, y_2 を消去すれば次の式を得る。

$$\begin{aligned}
 (A_2 + C_3 Z^2) r_2^2 - 2 \left(C_1 - \frac{3}{2} C_3 B^2 - C_3 Z^2 \right) Z^2 &= 0 \\
 (A_2^2 + 4\ell^2) r_2^2 - \left(\frac{3}{2} C_3 B^2 \right)^2 Z^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

(3.25)式より定数項 Z および ω 2高調波振動の振巾 r_2 を決定することができる。その後(3.23)式を用いて振巾 r_2 の成分 x_2 および y_2 を求めることが出来る。

(C) ω 3高調波振動

(3.16)式を(3.10)式に代入し $\sin \tau$, $\cos \tau$, $\sin 3\tau$ および $\cos 3\tau$ の係数をそれぞれゼロに等しいとおけば

$$\begin{aligned}
 &-(A_1 + \frac{3}{4} C_3 B^2) x_1 - \ell y_1 - \frac{3}{4} C_3 [(x_1^2 - y_1^2 - B^2) x_3 + 2x_1 y_1 y_3] \\
 &\quad \equiv X_1(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0 \\
 &\ell x_1 - (A_1 - \frac{3}{4} C_3 B^2) y_1 + \frac{3}{4} C_3 [2x_1 y_1 x_3 - (x_1^2 - y_1^2 - B^2) y_3] \\
 &\quad \equiv Y_1(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

$$-A_3 x_3 - 3\ell y_3 + \frac{1}{4} C_3 [3B^2 - (x_1^2 - 3y_1^2)] x_1 \equiv X_3(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0$$

$$3\ell x_3 - A_3 y_3 + \frac{1}{4} C_3 [3B^2 - (3x_1^2 - y_1^2)] y_1 \equiv Y_3(x_1, y_1, x_3, y_3) = 0$$

ここに

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (2B^2 + r_1^2 + 2r_3^2) \\
 A_3 &= 9 - C_1 - \frac{3}{4} C_3 (2B^2 + 2r_1^2 + r_3^2) \\
 r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2, \quad r_3^2 = x_3^2 + y_3^2
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

(3.26), (3.27)式より x_1, y_1, x_3, y_3 および r_1, r_3 を求めることが出来る。

以上に述べた解の数値例を後に示す。

3.3 周期解の安定性

周期解の安定性を調べるために、才2.3節におけると同様に周期解より変分方程式を導きその解を吟味する。

(a) 基本調波振動

周期解 v_0 の変分 $\xi (= v - v_0)$ を考え、

$$\xi = e^{-\delta \tau} \cdot \eta, \quad \delta = k/2 \quad (3.28)$$

なる関係により変数 η を導入すれば η に関する次の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + (\theta_0 + 2\theta_{1s} \sin 2\tau + 2\theta_{1c} \cos 2\tau) \eta = 0$$

$$\text{ここに} \quad \theta_0 = C_1 - \delta^2 + \frac{3}{2} C_3 (B^2 + r_1^2) \quad (3.29)$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2} C_3 x_1 y_1, \quad \theta_{1c} = \frac{3}{4} C_3 (B^2 - x_1^2 + y_1^2)$$

才2.3節において述べたように η の特殊解を近似的に

$$\eta(\tau) = e^{\mu \tau} \phi(\tau) = e^{\mu \tau} \sin(\tau - \sigma_1) \quad (3.30)$$

と書くことが出来る。また周期解 v_0 の安定条件すなわち $|\mu| < \delta$ となる条件は

$$\Delta(\delta) = \begin{vmatrix} \theta_0 + \delta^2 - 1 - \theta_{1c} & \theta_{1s} - 2\delta \\ \theta_{1s} + 2\delta & \theta_0 + \delta^2 - 1 + \theta_{1c} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_1, y_1)} > 0 \quad (3.31)$$

となりこれを整理すれば

$$A_1 < 0 \quad (3.32)$$

と表わすことができる。

なお $dB/dr_1 = 0$ となる点、すなわち振り特性曲線 ($B-r_1$ 曲線) が垂直接線をもつ点が $A_1 = 0$ なる安定限界となることも才2.3節におけると同様にして証明することができる。

(b) 才2高調波振動

(a)項におけると同様にして振動の安定条件

$$\frac{\partial(Z, X_2, Y_2)}{\partial(Z, x_2, y_2)} > 0 \quad (3.33)$$

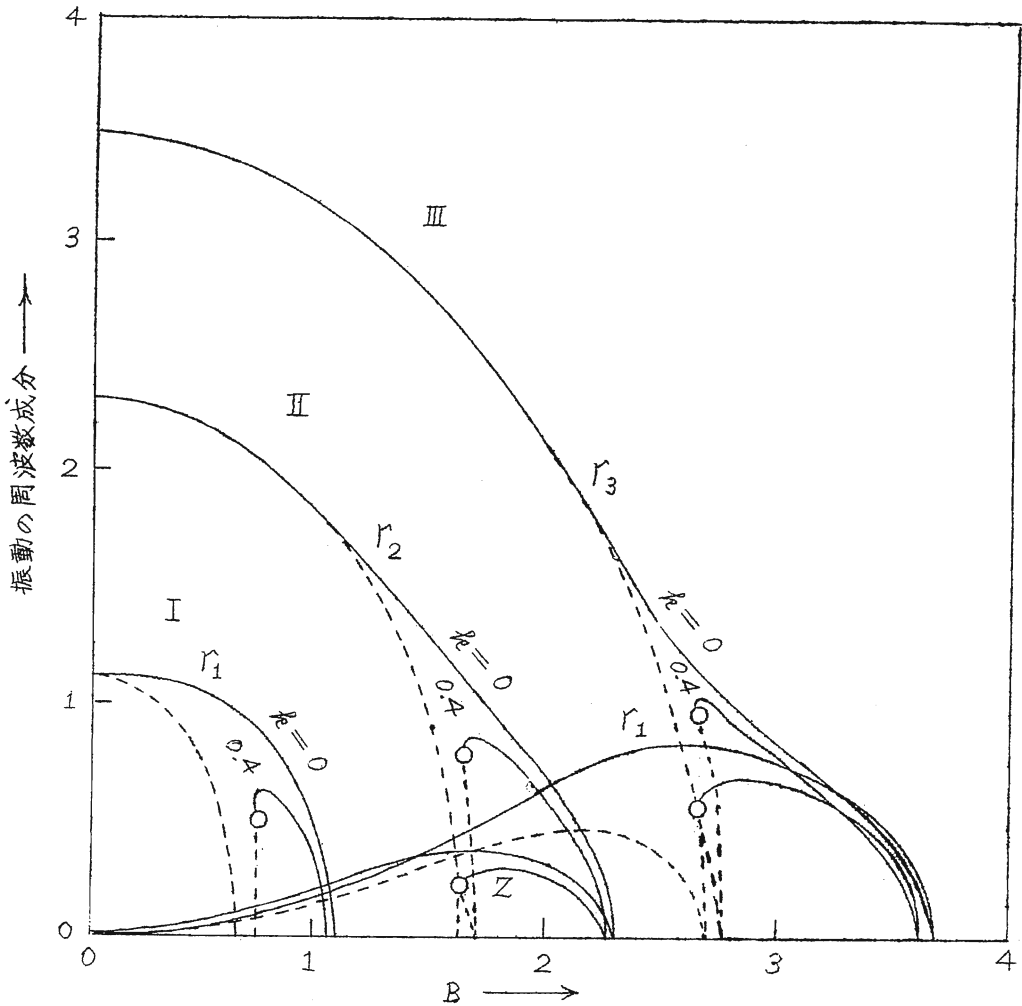
を求めることができる。なお振巾特性 ($B-r_2$ 曲線および $B-Z$ 曲線) が垂直接線をもつ点が安定限界である。

(C) 3 高調波振動

振動の安定条件は

$$\frac{\partial(X_1, Y_1, X_3, Y_3)}{\partial(x_1, y_1, x_3, y_3)} > 0 \quad (3.34)$$

であり、振巾特性曲線 ($B-r_1$ 曲線および $B-r_3$ 曲線) が垂直接線をも



第3.3図 振動の振巾特性

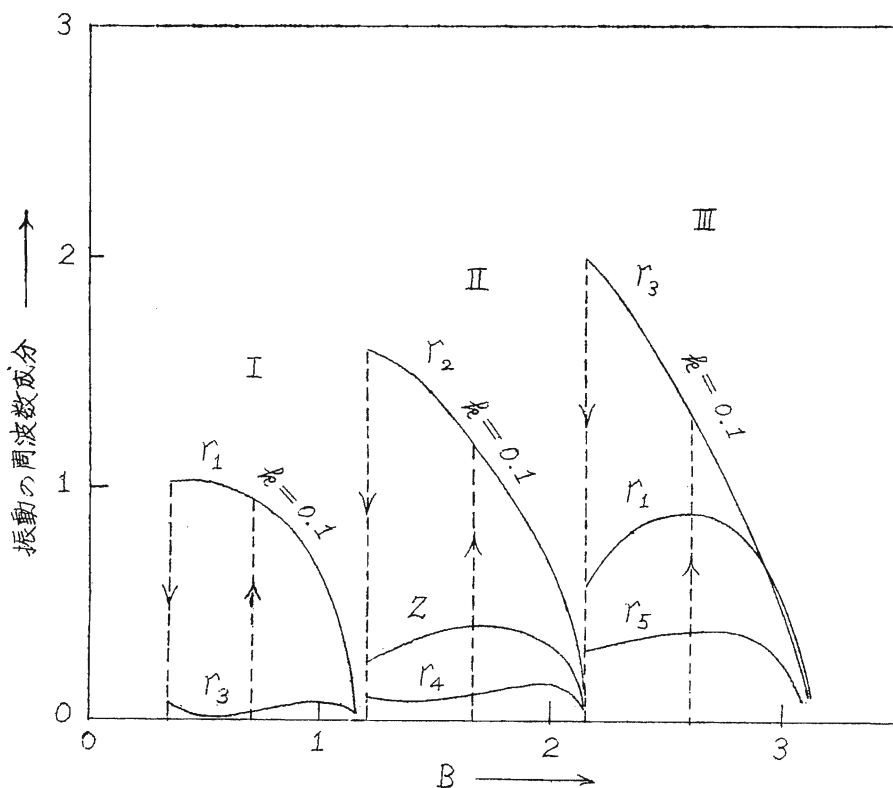
つ点が安定限界である。

数値値 可飽和鉄心の特徴を表わすパラメタを $C_1=0$, $C_3=1$ とすれば (3.10) 式は

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + k \frac{dv}{d\tau} + \frac{3}{2} B^2 (1 + \cos 2\tau) v + v^3 = 0 \quad (3.35)$$

(3.35) 式の第1次～第3次不安定領域において発生する周期振動 (3.14), (3.15), (3.16) 式の振巾特性をそれぞれ (3.21), (3.25), (3.26) 式より求めた結果を第3.3図に示す。また (3.32), (3.33), (3.34) 式を用いて振動の安定性を判別し, 第3.3図において安定な振動を実線, 不安定な振動を点線で示した。

3.4 アナログ計算機による計算



第3.4図 アナログ計算機による計算結果

(3.35)式をアナログ計算機を用いて解いた。第3.4図は ν 1次～ ν 3次不安定領域において発生する振動の周波数成分を示す。 ν 2次， ν 3次不安定領域においてはそれぞれ ν 2高調波， ν 3高調波が顕著なことが見られ，振巾特性は第3.3図の数値計算結果と定性的に一致している。ただ数値計算においては高次の高調波成分を無視しているため多少定量的な差異が見られる。

3.5 電気回路における実験

第3.5図（末尾のオフセット図参照）は同図中に示す回路の電圧 V_N を ν 1次～ ν 5次不安定領域において測定した結果である*。 V_N は (3.10) 式の磁束ひを時間微分した量に比例する，すなわち

$$V_N \propto \frac{d\psi}{dt}$$

と考えてよい。なお図に併記した波形の例により顕著に現われる高調波成分を見ることができる†。

終りにのぞみ本研究に御協力頂いた京都大学工学部倉光正己君に感謝の意を表する。また数値計算には京都大学 KDC-I デジタル計算機を使用した部分が多い。あわせて同計算機室の諸氏に謝意を表する。

文 献

1. C.Hayashi, Subharmonic Oscillations in Nonlinear Systems, J. Appl. Phys., 24: 521-529 (1953).

* ν 1次不安定領域における V_N の発生は従来中性点反転現象 (neutral inversion) として知られているものである。

† なお実験の詳細に関しては文献2, pp.44-48参照のこと。

2. C. Hayashi, "Forced Oscillations in Nonlinear Systems," Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, Japan, 1953.
3. C. Hayashi, Y. Nishikawa and M. Abe, Subharmonic Oscillations of Order One-Half, Trans. IRE on Circuit Theory, CT-7: 102-111 (1960).
4. C. Hayashi, H. Shibayama and Y. Nishikawa, Frequency Entrainment in a Self-Oscillatory System with External Force, Trans. IRE on Circuit Theory, CT-7: 413-422 (1960).
5. C. Hayashi and Y. Nishikawa, Initial Conditions Leading to Different Types of Periodic Solutions for Duffing's Equation, Symposium on Nonlinear Oscillations (Int. Union of Theo. and Appl. Mech.), Kiev, 1961.
6. E. Rouelle, Contribution à l'Etude Expérimentale de la Ferro-Résonance, Rev. Gén. de l'Elec., 36: 715-738, 763-780, 795-819, 841-858 (1934).
7. G. Floquet, Sur les Equations Différentielles Linéaires, Ann. de l'Ecole Norm. Sup., 2-12: 47-88 (1883).
- 8 林, 西川, Duffing の方程式の近似解法, 電気通信学会非直線理論研究会資料, 1962年12月.

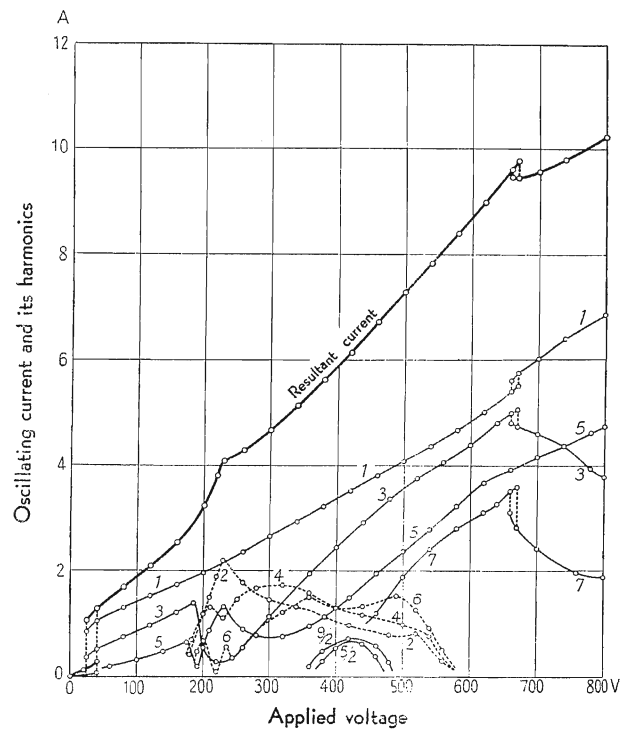


図2.5 電気回路における測定結果

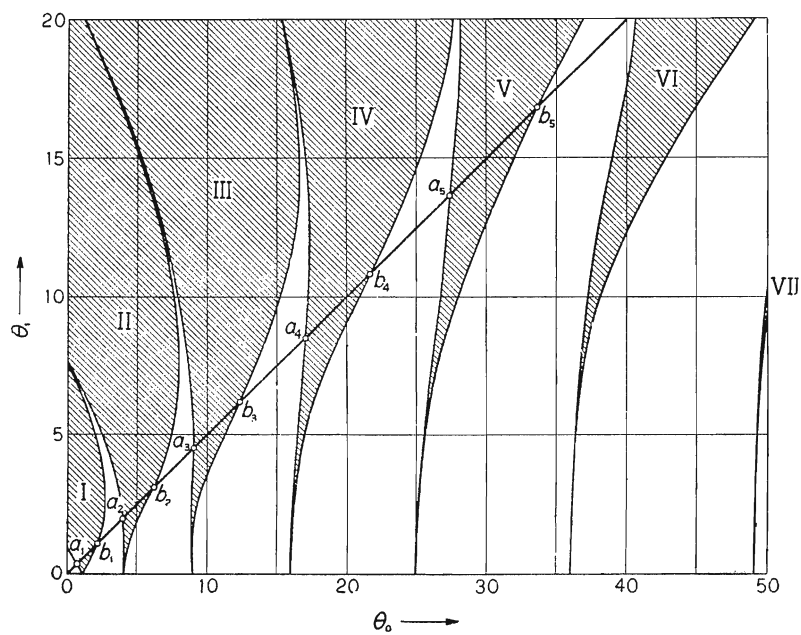


図3.2 θ_0, θ_1 の変化と不安定領域

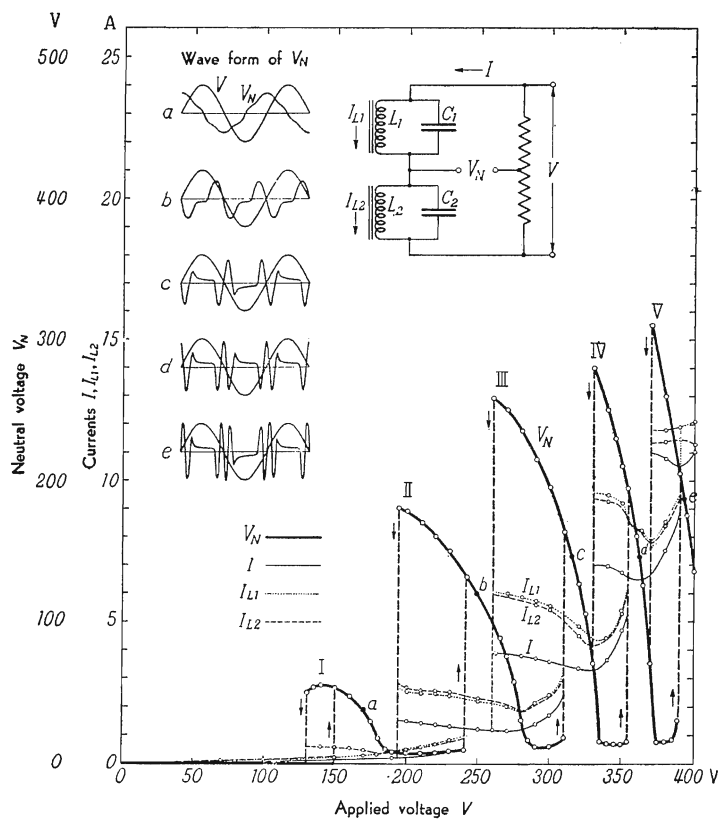


図3.5 電気回路における測定結果